TRIGONOMETRÍA

Profesor
LUZMILA MAYHUA G.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$

Demostración

$$\text{Sen}(x+y) = \text{Senx}.\text{Cosy} + \text{Seny}.\text{Cosx}$$

$$\text{Si}: y = x$$

$$\text{Sen}(x+x) = \text{Senx}.\text{Cosx} + \text{Senx}.\text{Cosx}$$

$$\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

Demostración

$$\text{Cos}(x+y) = \text{Cos}x.\text{Cos}y - \text{Sen}x.\text{Sen}y$$

$$\text{Si: } y = x$$

$$\text{Cos}(x+x) = \text{Cos}x.\text{Cos}x - \text{Sen}x.\text{Sen}x$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$$

- $\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$

Demostración

$$\text{Cos}2x = \underbrace{\text{Cos}^2x}_{1-\text{Sen}^2x} - \text{Sen}^2x$$

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

- $\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$

Demostración

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \underbrace{\text{Sen}^2x}_{1-\text{Cos}^2x}$$

$$\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - (1 - \text{Cos}^2x)$$

$$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Tan}2x = \dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$

Demostración

$$\text{Tan}(x + y) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}y}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}y}$$

$\text{Si: } y = x$

$$\text{Tan}(x + x) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}x}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}x}$$

$$\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

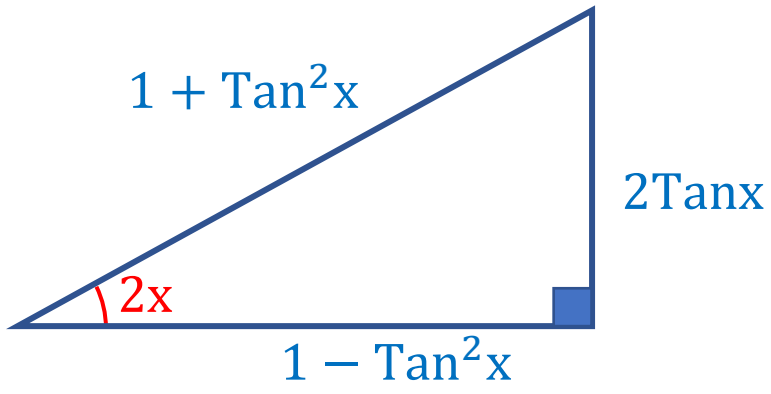
- $\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x.\text{Cos}x$

- $\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x$

  $\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$

  $\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$

- $\text{Tan}2x = \dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$



$$\text{Sen}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 + \text{Tan}^2x}$$

$$\text{Cos}2x = \frac{1 - \text{Tan}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

a) $(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$

Demostración

$$(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \underbrace{2\text{SenxCosx}}_{\text{Sen2x}}$$

$$(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

b) $\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \text{Cos}2x$

Demostración

$$\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \underbrace{(\text{Cos}^2x + \text{Sen}^2x)}_{1}\underbrace{(\text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x)}_{\text{Cos}2x}$$

$$\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \text{Cos}2x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

c) $\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x$

Demostración

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - 2\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - \frac{2.\,2\text{Sen}^2x.\,\text{Cos}^2x}{2}$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - \frac{\overbrace{4\text{Sen}^2x.\,\text{Cos}^2x}^{(\text{Sen}2x)^2}}{2}$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - \frac{\overbrace{2\text{Sen}^2 2x}^{(1-\text{Cos}4x)}}{2.2}$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{4}{4} - \frac{(1 - \text{Cos}4x)}{4}$$

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

d) $\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}4x$

Demostración

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - 3\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3.\overbrace{4\text{Sen}^2x.\text{Cos}^2x}^{(\text{Sen}2x)^2}}{4}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3\text{Sen}^2 2x}{4}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - \frac{3.\overbrace{2\text{Sen}^2 2x}^{(1-\text{Cos}4x)}}{4.2}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{8}{8} - \frac{3(1 - \text{Cos}4x)}{8}$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos}4x$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

e) $\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc}2\text{x}$

Demostración

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \text{Secx}.\text{Cscx}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{1}{\text{Cosx}.\text{Senx}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{2}{2\text{Senx}.\text{Cosx}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = \frac{2}{\text{Sen}2\text{x}}$$

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc}2\text{x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

f) $\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot}2\text{x}$

Demostración

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}} - \frac{\text{Senx}}{\text{Cosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{\text{Cos}^2\text{x} - \text{Sen}^2\text{x}}{\text{SenxCosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{2\ \text{Cos}2\text{x}}{2\ \text{SenxCosx}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = \frac{2\text{Cos}2\text{x}}{\text{Sen}2\text{x}}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot}2\text{x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

g) $\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$

Demostración

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc2x}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot2x} \quad (+)$$

$$\cancel{2}\text{Cotx} = \cancel{2}\text{Csc2x} + \cancel{2}\text{Cot2x}$$

$$\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

h) $\text{Tanx} = \text{Csc2x} - \text{Cot2x}$

Demostración

$$\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc2x}$$

$$\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot2x} \quad (-)$$

$$\cancel{2}\text{Tanx} = \cancel{2}\text{Csc2x} - \cancel{2}\text{Cot2x}$$

$$\text{Tanx} = \text{Csc2x} - \text{Cot2x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

i) $\text{Sec}2x + 1 = \dfrac{\text{Tan}2x}{\text{Tan}x}$

Demostración

$$\text{Sec}2x + 1 = \frac{1 + \text{Tan}^2x}{1 - \text{Tan}^2x} + 1$$

$$\text{Sec}2x + 1 = \frac{2}{1 - \text{Tan}^2x} \times \frac{\text{Tan}x}{\text{Tan}x}$$

$$\text{Sec}2x + 1 = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x} \times \frac{1}{\text{Tan}x}$$

$$\text{Sec}2x + 1 = \frac{\text{Tan}2x}{\text{Tan}x}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

j) $\mathrm{Sec2x} - 1 = \mathrm{Tan2x.Tanx}$

Demostración

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{1 + \mathrm{Tan^2x}}{1 - \mathrm{Tan^2x}} - 1$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{2\mathrm{Tan^2x}}{1 - \mathrm{Tan^2x}}$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \frac{2\mathrm{Tanx.Tanx}}{1 - \mathrm{Tan^2x}}$$

$$\mathrm{Sec2x} - 1 = \mathrm{Tan2xTanx}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES:

a) $(\text{Senx} \pm \text{Cosx})^2 = 1 \pm \text{Sen2x}$

b) $\text{Cos}^4\text{x} - \text{Sen}^4\text{x} = \text{Cos2x}$

c) $\text{Sen}^4\text{x} + \text{Cos}^4\text{x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos4x}$

d) $\text{Sen}^6\text{x} + \text{Cos}^6\text{x} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\text{Cos4x}$

e) $\text{Cotx} + \text{Tanx} = 2\text{Csc2x}$

f) $\text{Cotx} - \text{Tanx} = 2\text{Cot2x}$

g) $\text{Cotx} = \text{Csc2x} + \text{Cot2x}$

h) $\text{Tanx} = \text{Csc2x} - \text{Cot2x}$

i) $\text{Sec2x} + 1 = \frac{\text{Tan2x}}{\text{Tanx}}$

j) $\text{Sec2x} - 1 = \text{Tan2x}.\text{Tanx}$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $2\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}2x$

Demostración

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

$$2\text{Sen}^2x = 1 - \text{Cos}2x$$

- $2\text{Cos}^2x = 1 + \text{Cos}2x$

Demostración

$$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$

$$2\text{Cos}^2x = 1 + \text{Cos}2x$$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

❖ $8\text{Sen}^4x = 3 - 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$

Demostración

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x$$

$$\text{Cos}^4x - \text{Sen}^4x = \text{Cos}2x \quad (-)$$

$$2\text{Sen}^4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4x - \text{Cos}2x$$

$\times 4$: $\quad 8\text{Sen}^4x = 3 - 4\text{Cos}2x + \text{Cos}4x$

3. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

❖ $8\text{Cos}^4\text{x} = 3 + 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$

Demostración

$$\text{Sen}^4\text{x} + \text{Cos}^4\text{x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4\text{x}$$

$$\text{Cos}^4\text{x} - \text{Sen}^4\text{x} = \text{Cos}2\text{x}$$

(+)

$$2\text{Cos}^4\text{x} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\text{Cos}4\text{x} + \text{Cos}2\text{x}$$

$\times 4$: $\quad 8\text{Cos}^4\text{x} = 3 + 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$

2. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $2\text{Sen}^2\text{x} = 1 - \text{Cos}2\text{x}$
- $2\text{Cos}^2\text{x} = 1 + \text{Cos}2\text{x}$
- $8\text{Sen}^4\text{x} = 3 - 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$
- $8\text{Cos}^4\text{x} = 3 + 4\text{Cos}2\text{x} + \text{Cos}4\text{x}$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

❖ OBSERVACIÓN:

$$-\frac{1}{2} \leq \mathbf{Senx.Cosx} \leq \frac{1}{2}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leq \mathbf{Sen^{2n}x + Cos^{2n}x} \leq \mathbf{1}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{+}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO DOBLE

❖ PROPIEDAD:

Si $x \in [0\ ;\ \pi]$, se cumple:

- $$\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+2\mathrm{Cos}x}}}}}_{\text{n radicales}} = 2\mathrm{Sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

- $$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+2\mathrm{Cos}x}}}}}_{\text{n radicales}} = 2\mathrm{Cos}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO MITAD

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}x}{2}}$

Demostración

$$2\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}2\theta$$

$$\text{Sen}^2\theta = \frac{1-\text{Cos}2\theta}{2}$$

$$\text{Sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}2\theta}{2}}$$

$$\text{Si: } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\text{Sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}x}{2}}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO MITAD

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Cos}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}x}{2}}$

Demostración

$$2\text{Cos}^2\theta = 1 + \text{Cos}2\theta$$

$$\text{Cos}^2\theta = \frac{1+\text{Cos}2\theta}{2}$$

$$\text{Cos}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}2\theta}{2}}$$

$$\text{Si: } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\text{Cos}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}x}{2}}$$

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Tan}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos}x}{1+\text{Cos}x}}$

Demostración

$$\text{Sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}x}{2}}$$

$$\text{Cos}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}x}{2}}$$

$$\text{Tan}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\text{Cos}x}{\cancel{2}}}{\frac{1+\text{Cos}x}{\cancel{2}}}}$$

$$\text{Tan}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}x}{1+\text{Cos}x}}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO MITAD

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos}x}{2}}$
- $\text{Cos}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\text{Cos}x}{2}}$
- $\text{Tan}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{Cos}x}{1+\text{Cos}x}}$
- $\text{Cot}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\text{Cos}x}{1-\text{Cos}x}}$

Observación:

El signo $(\pm)$ depende del cuadrante del ángulo mitad $\left(\dfrac{x}{2}\right)$

2. IDENTIDADES AUXILIARES :

- $\text{Tan}\frac{x}{2} = \text{Cscx} - \text{Cotx}$

Demostración

$$\text{Tan}\theta = \text{Csc}2\theta - \text{Cot}2\theta$$

$$\text{Si: } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\text{Tan}\frac{x}{2} = \text{Cscx} - \text{Cotx}$$

2. IDENTIDADES AUXILIARES :

- $\text{Cot}\frac{x}{2} = \text{Cscx} + \text{Cotx}$

Demostración

$$\text{Cot}\theta = \text{Csc}2\theta + \text{Cot}2\theta$$

$$\text{Si: } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\text{Cot}\frac{x}{2} = \text{Cscx} + \text{Cotx}$$

2. IDENTIDADES AUXILARES :

a) $\mathrm{Tan}\dfrac{x}{2} = \mathrm{Csc}x - \mathrm{Cot}x$

b) $\mathrm{Cot}\dfrac{x}{2} = \mathrm{Csc}x + \mathrm{Cot}x$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO MITAD

❖ PROPIEDAD:

- $$2\text{Sen}\frac{\pi}{2^n} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{(n-1)\text{radicales}}$$

- $$2\text{Cos}\frac{\pi}{2^n} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}}_{(n-1)\text{radicales}}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO TRIPLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$

Demostración

$$\text{Sen}(x+y) = \text{Sen}x\text{Cos}y + \text{Sen}y\text{Cos}x$$

$$\text{Si: } y = 2x$$

$$\text{Sen}(x+2x) = \text{Sen}x\text{Cos}2x + \text{Sen}2x\text{Cos}x$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}x(1 - 2\text{Sen}^2x) + (2\text{Sen}x.\text{Cos}x)\text{Cos}x$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}x - 2\text{Sen}^3x + 2\text{Sen}x.\text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}x - 2\text{Sen}^3x + 2\text{Sen}x(1 - \text{Sen}^2x)$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}x - 2\text{Sen}^3x + 2\text{Sen}x - 2\text{Sen}^3x$$

$$\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO TRIPLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$

Demostración

$$\text{Cos}(x+y) = \text{Cos}x\text{Cos}y - \text{Sen}x\text{Sen}y$$

$$\text{Si: } y = 2x$$

$$\text{Cos}(x+2x) = \text{Cos}x\text{Cos}2x - \text{Sen}x\text{Sen}2x$$

$$\text{Cos}3x = \text{Cos}x(2\text{Cos}^2x - 1) - \text{Sen}x(2\text{Sen}x.\text{Cos}x)$$

$$\text{Cos}3x = 2\text{Cos}^3x - \text{Cos}x - 2\text{Sen}^2x.\text{Cos}x$$

$$\text{Cos}3x = 2\text{Cos}^3x - \text{Cos}x - 2\text{Cos}x(1 - \text{Cos}^2x)$$

$$\text{Cos}3x = 2\text{Cos}^3x - \text{Cos}x - 2\text{Cos}x + 2\text{Cos}^3x$$

$$\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO TRIPLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Tan}3x = \dfrac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$

Demostración

$$\text{Tan}(x+y) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}y}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}y}$$

$$\text{Si: } y = 2x$$

$$\text{Tan}(x + 2x) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}2x}{1 - \text{Tan}x.\text{Tan}2x}$$

$$\text{Tan}3x = \frac{\text{Tan}x + \dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}}{1 - \text{Tan}x.\dfrac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}}$$

$$\text{Tan}3x = \frac{\dfrac{\text{Tan}x - \text{Tan}^3x + 2\text{Tan}x}{\cancel{1 - \text{Tan}^2x}}}{\dfrac{1 - \text{Tan}^2x - 2\text{Tan}^2x}{\cancel{1 - \text{Tan}^2x}}}$$

$$\text{Tan}3x = \frac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO TRIPLE

1. IDENTIDADES PRINCIPALES:

- $\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$
- $\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$
- $\text{Tan}3x = \dfrac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$

2. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $4\text{Sen}^3\text{x} = 3\text{Senx} - \text{Sen}3\text{x}$

Demostración

$$\text{Sen}3\text{x} = 3\text{Senx} - 4\text{Sen}^3\text{x}$$

$$4\text{Sen}^3\text{x} = 3\text{Senx} - \text{Sen}3\text{x}$$

- $4\text{Cos}^3\text{x} = 3\text{Cosx} + \text{Cos}3\text{x}$

Demostración

$$\text{Cos}3\text{x} = 4\text{Cos}^3\text{x} - 3\text{Cosx}$$

$$4\text{Cos}^3\text{x} = 3\text{Cosx} + \text{Cos}3\text{x}$$

2. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN:

- $4\mathrm{Sen}^3\mathrm{x} = 3\mathrm{Senx} - \mathrm{Sen3x}$

- $4\mathrm{Cos}^3\mathrm{x} = 3\mathrm{Cosx} + \mathrm{Cos3x}$

3. IDENTIDADES AUXILIARES:

- $$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} = \begin{cases} 3 - 4\text{Sen}^2x \\ 4\text{Cos}^2x - 1 \\ 2\text{Cos}2x + 1 \end{cases}$$

Demostración

$$\text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$$

$$\text{Sen}3x = \text{Sen}x(3 - 4\text{Sen}^2x)$$

$$\mathbf{\frac{Sen3x}{Senx} = 3 - 4Sen^2x}$$

$$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} = 3 - 4(1 - \text{Cos}^2x)$$

$$\mathbf{\frac{Sen3x}{Senx} = 4Cos^2x - 1}$$

$$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} = 2 \times 2\text{Cos}^2x - 1$$

$$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} = 2(1 + \text{Cos}2x) - 1$$

$$\mathbf{\frac{Sen3x}{Senx} = 2Cos2x + 1}$$

3. IDENTIDADES AUXILIARES:

- $$\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = \begin{cases} 4\text{Cos}^2x - 3 \\ 1 - 4\text{Sen}^2x \\ 2\text{Cos}2x - 1 \end{cases}$$

Demostración

$$\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$$

$$\text{Cos}3x = \text{Cos}x(4\text{Cos}^2x - 3)$$

$$\boldsymbol{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 4\text{Cos}^2x - 3}$$

$$\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 4(1 - \text{Sen}^2x) - 3$$

$$\boldsymbol{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 1 - 4\text{Sen}^2x}$$

$$\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 1 - 2 \times 2\text{Sen}^2x$$

$$\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 1 - 2(1 - \text{Cos}2x)$$

$$\boldsymbol{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 2\text{Cos}2x - 1}$$

3. IDENTIDADES AUXILIARES:

- $$\frac{\text{Tan}3x}{\text{Tan}x} = \frac{2\text{Cos}2x + 1}{2\text{Cos}2x - 1}$$

Demostración

$$\frac{\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x} = 2\text{Cos}2x + 1}{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x} = 2\text{Cos}2x - 1}$$

$$\frac{\frac{\text{Sen}3x}{\text{Sen}x}}{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cos}x}} = \frac{2\text{Cos}2x + 1}{2\text{Cos}2x - 1}$$

$$\frac{\text{Tan}3x}{\text{Tan}x} = \frac{2\text{Cos}2x + 1}{2\text{Cos}2x - 1}$$

3. IDENTIDADES AUXILIARES:

- $$\left.\begin{array}{l} \mathbf{3-4Sen^2x} \\ \mathbf{4Cos^2x-1} \end{array}\right\} \frac{Sen3x}{Senx} = 2Cos2x+1$$

- $$\left.\begin{array}{l} \mathbf{4Cos^2x-3} \\ \mathbf{1-4Sen^2x} \end{array}\right\} \frac{Cos3x}{Cosx} = 2Cos2x-1$$

- $$\frac{Tan3x}{Tanx} = \frac{2Cos2x+1}{2Cos2x-1}$$

4. PROPIEDADES:

- $4\text{Senx}.\text{Sen}(60° - x).\text{Sen}(60° + x) = \text{Sen}3x$

Demostración

$$\text{Sen}(y + x).\text{Sen}(y - x) = \text{Sen}^2 y - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Si: } y = 60°$$

$$\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \text{Sen}^2 60° - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \frac{3}{4} - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \frac{\overbrace{3 - 4\text{Sen}^2 x}^{\frac{\text{Sen}3x}{\text{Senx}}}}{4}$$

$$4\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \frac{\text{Sen}3x}{\text{Senx}}$$

$$4\text{Senx}.\text{Sen}(60° + x).\text{Sen}(60° - x) = \text{Sen}3x$$

4. PROPIEDADES:

- $4\text{Cosx}.\text{Cos}(60° - x).\text{Cos}(60° + x) = \text{Cos}3x$

Demostración

$$\text{Cos}(y + x).\text{Cos}(y - x) = \text{Cos}^2 y - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Si: } y = 60°$$

$$\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \text{Cos}^2 60° - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \frac{1}{4} - \text{Sen}^2 x$$

$$\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \frac{\overbrace{1 - 4\text{Sen}^2 x}^{\frac{\text{Cos}3x}{\text{Cosx}}}}{4}$$

$$4\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \frac{\text{Cos}3x}{\text{Cosx}}$$

$$4\text{Cosx}.\text{Cos}(60° + x).\text{Cos}(60° - x) = \text{Cos}3x$$

4. PROPIEDADES:

- $\text{Tan}x.\text{Tan}(60° - x).\text{Tan}\,(60° + x) = \text{Tan}3x$

Demostración

$$\frac{\cancel{4}\text{Sen}x.\text{Sen}(60° - x).\text{Sen}(60° + x) = \text{Sen}3x}{\cancel{4}\text{Cos}x.\text{Cos}(60° - x).\text{Cos}(60° + x) = \text{Cos}3x}$$

$$\text{Tan}x.\text{Tan}(60° - x).\text{Tan}\,(60° + x) = \text{Tan}3x$$

IDENTIDADES PARA EL ÁNGULO TRIPLE

4. PROPIEDADES:

- $4\text{Senx}.\text{Sen}(60° - x).\text{Sen}(60° + x) = \text{Sen}3x$
- $4\text{Cosx}.\text{Cos}(60° - x).\text{Cos}(60° + x) = \text{Cos}3x$
- $\text{Tanx}.\text{Tan}(60° - x).\text{Tan}(60° + x) = \text{Tan}3x$

5. TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 18° Y 72°:

- $\text{Sen}18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Demostración

$$\text{Si: } \theta = 18°$$
$$5\theta = 90°$$
$$3\theta + 2\theta = 90°$$
$$\text{Cos}3\theta = \text{Sen}2\theta$$
$$\text{Cos}3\theta = 2\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta$$
$$\frac{\text{Cos}3\theta}{\text{Cos}\theta} = 2\text{Sen}\theta$$
$$1 - 4\text{Sen}^2\theta = 2\text{Sen}\theta$$
$$4\text{Sen}^2\theta + 2\text{Sen}\theta - 1 = 0$$

Fórmula General:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{-\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}(4)}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Sen}\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \checkmark \quad \vee \quad \text{Sen}\theta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \times$$

$$\mathbf{Sen18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

5. TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 36° Y 54°:

- $\text{Cos}36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

Demostración

$$\text{Cos}36° = 1 - 2\text{Sen}^2 18°$$

$$\text{Cos}36° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$\text{Cos}36° = 1 - \cancel{2}\left(\frac{\cancel{6} - \cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{16}}\right)$$

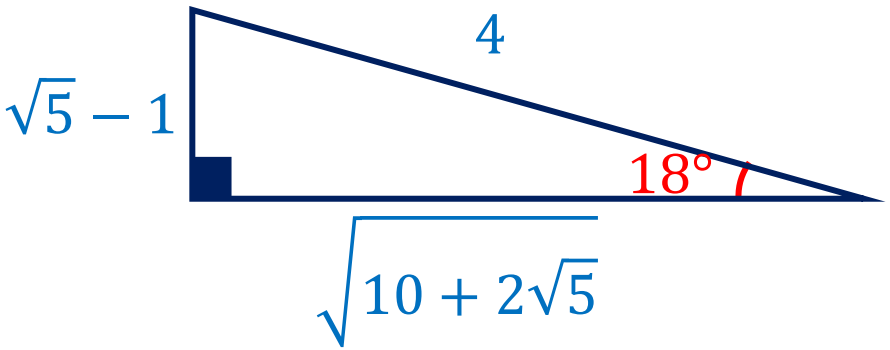
$$\text{Cos}36° = 1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\text{Cos}36° = \frac{4-3+\sqrt{5}}{4}$$

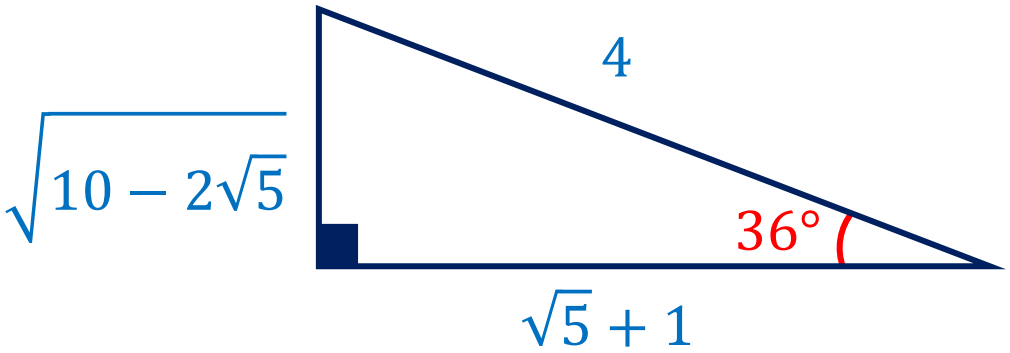
$$\text{Cos}36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

5. TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE 18° Y 36°:

- $\text{Sen}18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



- $\text{Cos}36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$



MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

1. Simplificar : $G = \underbrace{(1-\mathrm{Tan}^2x)(1-\mathrm{Tan}^2 2x)(1-\mathrm{Tan}^2 4x)\ldots}_{6\ \text{términos}}$

Resolución:

$$\mathrm{Tan}2x = \frac{2\mathrm{Tan}x}{(1-\mathrm{Tan}^2x)}$$

$$(1-\mathrm{Tan}^2x) = \frac{2\mathrm{Tan}x}{\mathrm{Tan}2x}$$

$$G = (1-\mathrm{Tan}^2x)(1-\mathrm{Tan}^2 2x)(1-\mathrm{Tan}^2 4x)\ldots(1-\mathrm{Tan}^2 32x)$$

$$G = \frac{2\mathrm{Tan}x}{\cancel{\mathrm{Tan}2x}} \times \frac{2\cancel{\mathrm{Tan}2x}}{\cancel{\mathrm{Tan}4x}} \times \frac{2\cancel{\mathrm{Tan}4x}}{\cancel{\mathrm{Tan}8x}} \times \frac{2\cancel{\mathrm{Tan}8x}}{\cancel{\mathrm{Tan}16x}} \times \frac{2\cancel{\mathrm{Tan}16x}}{\cancel{\mathrm{Tan}32x}} \times \frac{2\cancel{\mathrm{Tan}32x}}{\mathrm{Tan}64x}$$

$$G = \frac{2^6\mathrm{Tan}x}{\mathrm{Tan}64x}$$

$$\therefore\ \mathbf{G = 64TanxCot64x}$$

CLAVE: B

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

2. En un triángulo ABC se cumple : $\operatorname{Tan}\left(\frac{A}{4}\right) + \operatorname{Tan}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \operatorname{Csc}(B+C)$ Determinar el tipo de triángulo :

Resolución:

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A}{4}\right) + \operatorname{Tan}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \operatorname{Csc}(B+C)$$

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A}{4}\right) + \cancel{\operatorname{Csc}(B+C)} - \operatorname{Cot}(B+C) = \cancel{\operatorname{Csc}(B+C)}$$

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A}{4}\right) = \underbrace{\operatorname{Cot}(B+C)}_{+90°}$$

$$\left(\frac{A}{4}\right) + (B+C) = 90°$$

$$\left(\frac{A}{4}\right) + (180° - A) = 90°$$

$$\frac{3A}{4} = 90°$$

$$\therefore \mathbf{A = 120°}$$

CLAVE: E

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

3. Calcular AB, si : $A = \text{Sec}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{6} + \text{Cos}20°}$ $\quad B = \text{Csc}20° \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{6} - \text{Sen}20°}$

Resolución:

$$A = \text{Sec}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 3\text{Cos}20°\right)}$$

$$A = \text{Sec}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\text{Cos}60° + 3\text{Cos}20°)}$$

$$A = \text{Sec}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}(4\text{Cos}^3 20°)}$$

$$A = \text{Sec}20°\text{Cos}20° \times \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$B = \text{Csc}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\text{Sen}20°\right)}$$

$$B = \text{Csc}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\text{Sen}60° - 3\text{Sen}20°)}$$

$$B = \text{Csc}20° \times \sqrt[3]{\frac{1}{3}(-4\text{Sen}^3 20°)}$$

$$B = \text{Csc}20°\text{Sen}20° \times \sqrt[3]{\frac{-4}{3}}$$

$$B = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$AB = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \times -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \mathbf{AB = -\sqrt[3]{\frac{16}{9}}}$$

CLAVE: D

4. Siendo $\alpha = \frac{\pi}{16} + \frac{\theta}{4}$, donde α y θ son agudos, además : $\frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}^3\alpha}{\text{Tan}^4\alpha + \text{Sec}^2\alpha + \text{Tan}^2\alpha} = \frac{1}{4}$; calcular : "Senθ + Cosθ"

Resolución:

$$\frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}^3\alpha}{\text{Tan}^4\alpha + 1 + \text{Tan}^2\alpha + \text{Tan}^2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\text{Tan}\alpha(1 - \text{Tan}^2\alpha)}{\text{Tan}^4\alpha + 2\text{Tan}^2\alpha + 1} = \frac{1}{2.2}$$

$$\frac{2\text{Tan}\alpha(1 - \text{Tan}^2\alpha)}{(\text{Tan}^2\alpha + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\text{Tan}\alpha}{(1 + \text{Tan}^2\alpha)} \times \frac{(1 - \text{Tan}^2\alpha)}{(1 + \text{Tan}^2\alpha)} = \frac{1}{2}$$

$$2\text{Sen}2\alpha \times \text{Cos}2\alpha = 1$$

$$\text{Sen}4\alpha = 1$$

$$\rightarrow 4\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta$$

$$A = \text{Sen}\frac{\pi}{4} + \text{Cos}\frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \mathbf{A = \sqrt{2}}$$

CLAVE: D

5. Hallar la raíz cuadrada aproximada de : $P = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}\right)^2 + 1$

Resolución:

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}\right)^2 + 1$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 + 1$$

$$P = \left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right)^2 + 1$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\right)^2 + 1$$

$$P = \left((\sqrt{6}+\sqrt{2})-(2+\sqrt{3})\right)^2 + 1$$

$$P = \left(\operatorname{Csc}\frac{\pi}{12} - \operatorname{Cot}\frac{\pi}{12}\right)^2 + 1$$

$$P = \operatorname{Tan}^2\frac{\pi}{24} + 1$$

$$P = \operatorname{Sec}^2\frac{\pi}{24}$$

$$\therefore \sqrt{P} = \mathbf{Sec}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{24}}$$

CLAVE: A

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

6. Si: Sen3x = Cosx – Senx. Calcular : Sen2x + Cos2x

Resolución:

$$\text{Sen}3x = \text{Cos}x - \text{Sen}x$$

$$3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x + \text{Sen}x = \text{Cos}x$$

$$4\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x = \text{Cos}x$$

$$4\text{Sen}x(1 - \text{Sen}^2x) = \text{Cos}x$$

$$4\text{Sen}x\text{Cos}^{\cancel{2}}x = \cancel{\text{Cos}x}$$

$$2.2\text{Sen}x\text{Cos}x = 1$$

$$\text{Sen}2x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \text{Sen}2x + \text{Cos}2x$$

$$B = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \mathbf{B} = \frac{\mathbf{1 \pm \sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

CLAVE: C

7. Calcular el valor de : $M = \frac{1}{2}\text{Cos}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\text{Cos}\frac{3\pi}{8} + \text{Sen}^4\frac{\pi}{16} + \text{Sen}^4\frac{3\pi}{16}$

Resolución:

$$M = \frac{1}{2}\text{Cos}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\text{Cos}\frac{3\pi}{8} + \text{Sen}^4\frac{\pi}{16} + \text{Sen}^4\frac{3\pi}{16}$$

$$8M = 4\text{Cos}\frac{\pi}{8} + 4\text{Cos}\frac{3\pi}{8} + 8\text{Sen}^4\frac{\pi}{16} + 8\text{Sen}^4\frac{3\pi}{16}$$

$$8M = 4\text{Cos}\frac{\pi}{8} + 4\text{Cos}\frac{3\pi}{8} + 3 - 4\text{Cos}2\left(\frac{\pi}{16}\right) + \text{Cos}4\left(\frac{\pi}{16}\right) + 3 - 4\text{Cos}2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \text{Cos}4\left(\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$8M = \cancel{4\text{Cos}\frac{\pi}{8}} + \cancel{4\text{Cos}\frac{3\pi}{8}} + 3 - \cancel{4\text{Cos}\frac{\pi}{8}} + \cancel{\text{Cos}\frac{\pi}{4}} + 3 - \cancel{4\text{Cos}\frac{3\pi}{8}} + \underbrace{\text{Cos}\frac{3\pi}{4}}_{-\cancel{\text{Cos}\frac{\pi}{4}}}$$

$$8M = 6$$

$$\therefore \mathbf{M = \frac{3}{4}}$$

CLAVE: C

8. Si : $(1+n\text{Cos}\theta)(1-n\text{Cos}\varphi)=1-n^2$, además : $\text{Tan}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\text{Cot}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$

Resolución:

$$\left(\pm\sqrt{\frac{1-\text{Cos}\theta}{1+\text{Cos}\theta}}\right)^2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\text{Cos}\varphi}{1-\text{Cos}\varphi}}\right)^2=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$$

$$\frac{1-\text{Cos}\theta}{1+\text{Cos}\theta}\times\frac{1+\text{Cos}\varphi}{1-\text{Cos}\varphi}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$$

$$\frac{1+\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi}{1-\text{Cos}\varphi+\text{Cos}\theta-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$$

$$\frac{(1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi)+(\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta)}{(1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi)-(\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta)}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$$

$$\frac{1+n}{1-n}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^k$$

$$\therefore\ \mathbf{k=-1}$$

$$(1+n\text{Cos}\theta)(1-n\text{Cos}\varphi)=1-n^2$$

$$\cancel{1}-n\text{Cos}\varphi+n\text{Cos}\theta-n^2\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi=\cancel{1}-n^2$$

$$n^{\cancel{2}}(1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi)=\cancel{n}(\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta)$$

$$\frac{1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi}{\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{(1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi)+(\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta)}{(1-\text{Cos}\theta\text{Cos}\varphi)-(\text{Cos}\varphi-\text{Cos}\theta)}=\frac{1+n}{1-n}$$

CLAVE: B

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

9. Eliminar x : $\text{Cos}(\theta - 3x) = m\text{Cos}^3x \qquad \text{Sen}(\theta - 3x) = m\text{Sen}^3x$

Resolución:

$$4\text{Sen}(\theta - 3x) = m4\text{Sen}^3x$$
$$4(\text{Sen}\theta\text{Cos}3x - \text{Sen}3x\text{Cos}\theta) = m(3\text{Sen}x - \text{Sen}3x)$$
$$4\text{Sen}\theta\text{Cos}3x - 4\text{Sen}3x\text{Cos}\theta = 3m\text{Sen}x - m\text{Sen}3x$$
$$(m - 4\text{Cos}\theta)\text{Sen}3x + 4\text{Sen}\theta\text{Cos}3x = 3m\text{Sen}x$$

$$4\text{Cos}(\theta - 3x) = m4\text{Cos}^3x$$
$$4(\text{Cos}\theta\text{Cos}3x + \text{Sen}\theta\text{Sen}3x) = m(3\text{Cos}x + \text{Cos}3x)$$
$$4\text{Cos}\theta\text{Cos}3x + 4\text{Sen}\theta\text{Sen}3x = 3m\text{Cos}x + m\text{Cos}3x$$
$$4\text{Sen}\theta\text{Sen}3x - (m - 4\text{Cos}\theta)\text{Cos}3x = 3m\text{Cos}x$$

$$(m - 4\text{Cos}\theta)^2\text{Sen}^2 3x + \cancel{8\text{Sen}\theta(m - 4\text{Cos}\theta)\text{Sen}3x\text{Cos}3x} + 16\text{Sen}^2\theta\text{Cos}^2 3x = 9m^2\text{Sen}^2x$$
$$16\text{Sen}^2\theta\text{Sen}^2 3x - \cancel{8\text{Sen}\theta(m - 4\text{Cos}\theta)\text{Sen}3x\text{Cos}3x} + (m - 4\text{Cos}\theta)^2\text{Cos}^2 3x = 9m^2\text{Cos}^2x$$

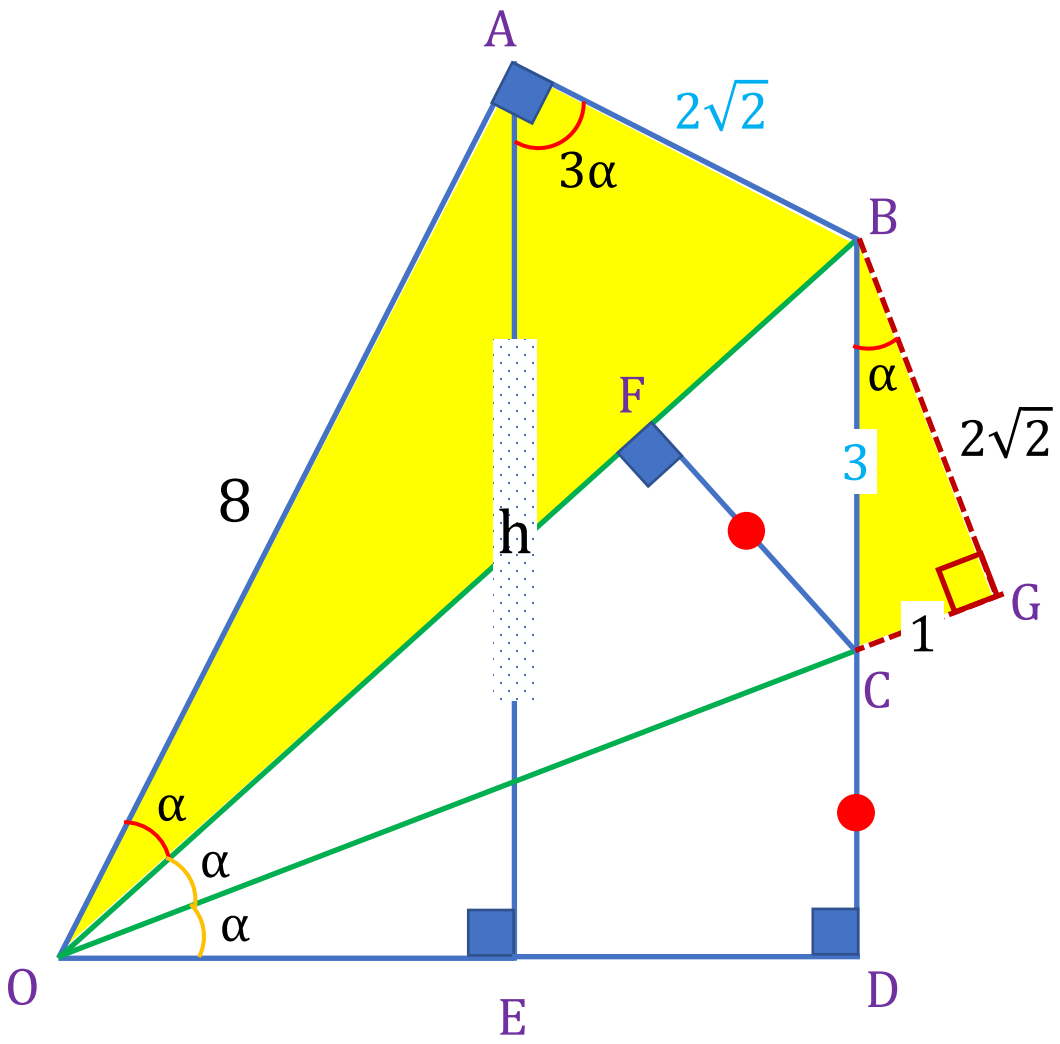
$+$

$$(m - 4\text{Cos}\theta)^2\underbrace{(\text{Sen}^2 3x + \text{Cos}^2 3x)}_{1} + 16\text{Sen}^2\theta\underbrace{(\text{Sen}^2 3x + \text{Cos}^2 3x)}_{1} = 9m^2\underbrace{(\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x)}_{1}$$

$$(m)^2 - 8m\text{Cos}\theta + 16\text{Cos}^2\theta + 16\text{Sen}^2\theta = 9m^2$$
$$m^2 = 2 - m\text{Cos}\theta$$

CLAVE: B

10. En la figura, determine el valor de $27\dfrac{h}{8}$, siendo AE=h



Resolución:

$\measuredangle OAB \sim \measuredangle BGC$

$$\text{Sen}3\alpha = \frac{h}{8} \qquad \text{Sen}\alpha = \frac{1}{3}$$

$$3\text{Sen}\alpha - 4\text{Sen}^3\alpha = \frac{h}{8}$$

$$3\left(\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{h}{8}$$

$$1 - \frac{4}{27} = \frac{h}{8}$$

$$\frac{23}{27} = \frac{h}{8}$$

$$\therefore \frac{27h}{8} = 23$$

CLAVE: D

11. Si $x \in IC$, además $\operatorname{Tan}x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, hallar el equivalente de: $H = \left(\frac{\operatorname{Sen}2x}{\operatorname{Sec}x + \operatorname{Cos}x}\right)\sqrt{1 + \frac{b}{a}}$

Resolución:

CLAVE: E

12. Si se tiene que : $\sqrt{3}\text{Senx} + \text{Cosx} = \frac{2}{3}$, calcule el valor de : $E = \text{Sen}^2\frac{\pi}{3} + \text{Tan}^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

Resolución:

CLAVE: C

13. Hallar la extensión de la expresión : $F(x) = \dfrac{\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)}{\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} + \dfrac{\text{Sen}3x - 3\text{Sen}x}{\text{Vers}x} - 1$

Resolución:

CLAVE: E

14. Sabiendo que $0 < x < \pi/4$, además :$\text{Cos}^2x + \text{Cos}^2 2x + \text{Cos}^3 2x = 1$, hallar el valor de : $M = \text{Tan}x + \text{Tan}^2x + \text{Tan}^3x$

Resolución:

CLAVE: A

15. Determine la sumatoria siguiente : $E = \text{Csc}x + \text{Csc}2x + \text{Csc}4x + \ldots + \text{Csc}2^{n}x$

Resolución:

CLAVE: E

16. Reducir la expresión : $E = \left(1 + \frac{2\text{Cos}(30° - x)}{\text{Sen}3x}\right) + \text{Tan}^2 x\text{Cot}(30° + x)$

Resolución:

CLAVE: B

17. Hallar x, si: $\dfrac{x + x^{-1}}{2} = \dfrac{\mathrm{Tan}^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \mathrm{Tan}^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{\mathrm{Tan}^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \mathrm{Tan}^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$

Resolución:

CLAVE: B

18. Si se tiene que : $\mathrm{Sec}\theta - \mathrm{Tan}\theta = 7 - 4\sqrt{3}$ calcule el valor de : $E = 2\mathrm{Cot}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) - 49\mathrm{Sen}2\theta$

Resolución:

CLAVE: A

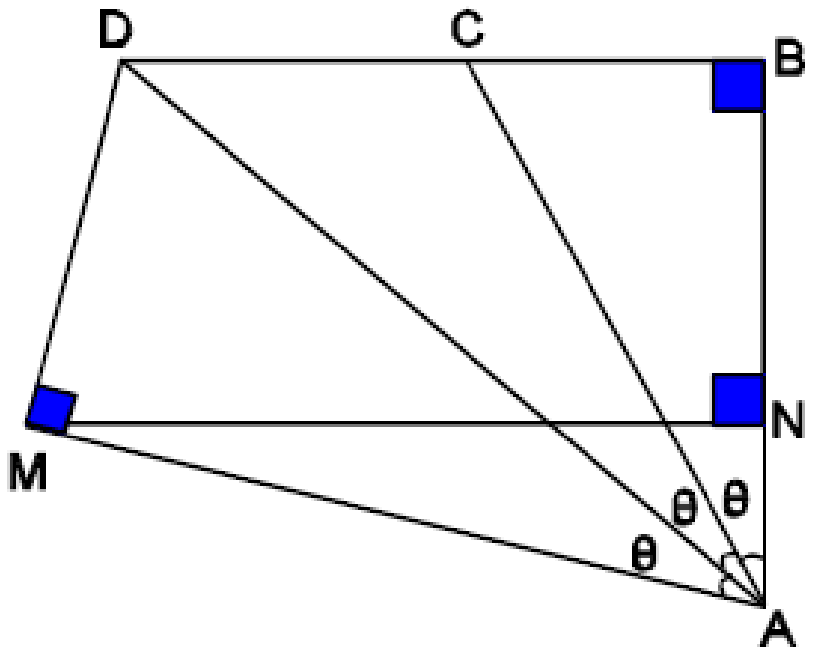
19. Si : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ calcular el mínimo valor de : $E = \text{Sen}\alpha\text{Cos}^3\beta + \text{Cos}\alpha\text{Sen}^3\beta$

Resolución:

CLAVE: D

IDENTIDADES DE ÁNGULOS MULTIPLES

20. De la figura, calcular 27 MN, si CD = 3 y MD $=\sqrt{5}$



Resolución:

CLAVE: E

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS